ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - (SOS)

Η μοναδιαία σφαίρα $S = \Phi([0,\pi]\times[0,2\pi])$ έχει παραμετρικοποίηση (πιθανή - υποψήφιοι)

$$\Phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2 (=M)$$

με σύνολο παραμέτρων $K=[0,\pi]\times[0,2\pi]$

Να υπολογιστεί $N(\varphi(\theta,\varphi))$ και $n(\varphi(\theta,\varphi))$

ΛΥΣΗ

$$N(\varphi(\theta,\varphi)) = \frac{\partial\varphi(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\times\frac{\partial\varphi(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ +r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\theta\cdot\sin\varphi \\ r^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

όπου $\|N(\varphi(\theta,\varphi))\|^2 = r^4\cdot\sin^2\theta\cdot\sin^2\theta + r^4\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta = r^4\sin^2\theta$

$\Rightarrow \|N(\varphi(\theta,\varphi))\| = r^2\sin\theta$.

(Άλλος τρόπος παραμετρικοποίησης του άνω και κάτω ημισφαιρίου: $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm\sqrt{r^2-x^2-y^2} \end{pmatrix}, (x,y)\in D$

όπου $D=\{(x,y): x^2+y^2\le r^2\}$ ως άσκηση να υπολογιστεί το $N(\varphi(x,y))$ $\forall (x,y)\in D$)

Ορισμός επιφανειακών ολοκληρωμάτων βαθμωτής και διανυσματικής συνάρτησης:

Έστω $\phi: K \to \mathbb{R}^3$ μια παραμετρική επιφάνεια C^1 και

α) $f: \Phi(K) \to \mathbb{R}$ ένα συνεχές βαθμωτό πεδίο:

Το $\int_\phi f \cdot d\sigma := \int_K f(\phi(u,v)) \, \|N(\phi(u,v))\| \, d(u,v)$ ονομάζεται επιφανειακό ολοκλήρωμα της f πάνω (ή επί) της ϕ.

β) $\bar{F}: \Phi(K) \to \mathbb{R}^3$ το $\int_\Phi \bar{F} \cdot n \, d\sigma := \int_K \bar{F}(\Phi(u,v)) \cdot n(\phi(u,v)) \cdot \|N(\phi(u,v))\| \, d(u,v)$

$= \int_K \bar{F}(\phi(u,v)) \cdot N(\phi(u,v)) \, d(u,v)$ και λέγεται επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\bar{F}$ επί της ϕ.

Το ολοκλήρωμα $\int_\phi 1 \, d\sigma = \int_K \|N(\phi(u,v))\| \cdot d(u,v)$ μας δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας $\Phi(K) \subset \mathbb{R}^3$ (όπως θα δούμε κάποιο ολοκλήρωμα $\int_\phi f \, d\sigma$ είναι ανεξάρτητο της παραμετρικοποίησης της $S := \Phi(K) \subset \mathbb{R}^3$ και άρα γράφουμε $\int_S f \cdot d\sigma$)

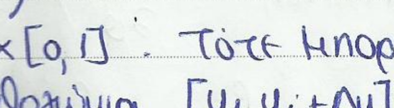
Ερμηνεία: Έστω ότι $K = [0,1] \times [0,1]$. Τότε μπορούμε να το διαμερίσουμε σε υποορθογώνια $[u_i, u_i + \Delta u] \times [v_j, v_j + \Delta v]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ και $j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \|N(\phi(u_i, v_j))\| \, \Delta u \, \Delta v$$

προσεγγίζει το

$$\int_\phi \|N(\phi(u,v))\| \, d(u,v).$$

όμως $\|N(\phi(u,v))\| \, \Delta u \, \Delta v = \underbrace{\left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \Delta u \right) \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial v} \Delta v \right) \right\|}_{\text{εμβαδόν του παραλληλογράμμου}}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Αν $S = \Phi(K)$

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ r \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \quad (\theta, \varphi) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi] \quad r > 0$$

τότε:

$$\int_S 1\, d\sigma = \int_\Phi 1\, d\sigma = \int_K \| k(\varphi(u,v)) \| d(u,v) =$$

$$= \int_K r^2 \cdot \sin\theta \; d(\theta,\varphi) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 4\pi r^2$$

ΑΣΚΗΣΗ:

Υπολογίστε το $\int_S (x^2+y^2) z \, d\sigma$ όπου $S = \Phi(K)$ όπου Φ ίδιο με το παραπάνω παράδειγμα: